

Ejercicio 6: El universo heterogéneo (1)

Para tratar el universo heterogéneo con fluctuaciones como en el CMB, tenemos que entender las ecuaciones que describen la evolución de éstas. Para esto, frecuentemente podemos considerar las leyes en el espacio físico, y derivar las leyes en un espacio en expansión con una transformación a coordenadas comóviles.

1) Sea \vec{x} la coordenada comóvil y $\vec{r} = a\vec{x}$ la coordenada física. Calcule el diferencial $d\vec{r}$ y la velocidad física $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}$. Expresé \vec{v} con la velocidad peculiar $\vec{u} = a\dot{\vec{x}}$.

4 points

2) En el espacio físico, el movimiento de partículas sigue la ley

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}. \quad (1)$$

Use la definición de \vec{x} y \vec{u} para derivar la relación correspondiente en coordenadas comóviles.

3 points

3) En el espacio físico, el impulso $\vec{q} = m\vec{v}$, con m la masa de la partícula, sigue la ley de Newton,

$$\dot{\vec{q}} = \vec{F}, \quad (2)$$

con \vec{F} la fuerza. Después, considere un impulso comóvil $\vec{q}_c = m\vec{u}$. Derive una ecuación para $\dot{\vec{q}}_c$, y exprese ésta con una fuerza generalizada $\vec{F}_c = \vec{F} - m\ddot{a}\vec{x}$, corregida por el efecto de la aceleración.

4 points

4) Finalmente, nos preparamos para transformar también las ecuaciones con derivadas en \vec{r} y t , como las ecuaciones de los fluidos. Suponga que haya una función $f(t, \vec{r})$ en el espacio físico, por ejemplo la densidad. El diferencial de f es dado como

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \nabla_r f \cdot d\vec{r}, \quad (3)$$

con ∇_r el operador del gradiente en el espacio físico. Inserte el diferencial $d\vec{r}$ en esta expresión, y escríbala de la forma

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) f dt + (\nabla_x + B) f \cdot d\vec{x}, \quad (4)$$

con expresiones de A y B , y el operador del gradiente comóvil $\nabla_x = a\nabla_r$.

4 points

Entregar tareas: Se debe entregar la tarea hasta el 18 de junio de 2020, 11:00, a Matias Morales (astro.mmorales@gmail.com).