Primer certamen - solución

1) Ejercicio:

La primera ley de la termodinámica dice que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p/c^2) = 0. \tag{1}$$

Para la radiación, sabemos que $p = \frac{1}{3}\rho c^2$. Inserte esto en la primera ley y calcule como ρ depende de a.

Solución:

Inserir $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ en (1) lleva

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{4}{3}\rho = 0. \tag{2}$$

Se debe hacer separación de variables:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{a}}{a}. \tag{3}$$

Multiplicar en ambos lados con dt y integrar desde ρ_0 a ρ y desde a_0 a a lleva

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}. \tag{4}$$

2) Ejercicio:

La ecuación de Friedmann dice que

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{K,0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}). \tag{5}$$

Suponga que el Universo solo consiste de la constante cosmologica, i.e. $\Omega_{\Lambda,0} = 1$ y $\Omega_{r,0} = \Omega_{K,0} = \Omega_{m,0} = 0$. Calcule como el factor de escala a depende del tiempo t.

Solución:

Inseriendo los parámetros, tenemos la ecuación

$$H^2 = H_0^2, \tag{6}$$

con $H = \dot{a}/a$.Eso implica que

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a^2 \tag{7}$$

o

$$\dot{a} = \pm H_0 a \tag{8}$$

Como nuestro Universo esta en expansión, debemos elegir la solución con signo positivo. Eso implica que

$$a(t) = a_0 \exp\left(H_0 t\right). \tag{9}$$

3) Ejercicio:

La densidad de la materia non-relativistica es $\rho_m = \Omega_{m,0}\rho_{cr,0}a^{-3}$, y la densidad de la radiación es $\rho_r = \Omega_{r,0}\rho_{cr,0}a^{-4}$. Suponga que $\Omega_{m,0} = 0.3$ y $\Omega_{r,0} = 10^{-5}$. Calcule el factor de escala a para que $\rho_m = \rho_r$. ¿Cómo se interpreta este valor del factor de escala? ¿A qué redshift corresponde este valor de a?

Solución:

Debemos considerar la igualdad de las expresiones:

$$\rho_m = \Omega_{m,0}\rho_{cr,0}a^{-3} = \Omega_{r,0}\rho_{cr,0}a^{-4} = \rho_r. \tag{10}$$

Solucionar para a implica que

$$a = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \sim 3.3 \times 10^{-5}. \tag{11}$$

El redshift calculamos como

$$z = \frac{1}{a} - 1 \sim 3 \times 10^4. \tag{12}$$

Eso es el redshift cuando las densidades de radiación y materia eran iguales. Para redshifts más alto, la energia del Universo era dominada por radiación, después era dominada por materia non-relativista.

4) Ejercicio:

Defina el concepto de la ”luminosity distance”. ¿Cómo depende de la ”co-moving distance” r_0 y del redshift z? Describa también el concepto de un ”standard candle” y como lo podemos usar para comprobar la cosmologia.

Solución:
La ”luminosity distance” D_L esta definido por la relación que

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2}, \tag{13}$$

con L la luminosidad de una fuente, y F el flujo observado.

Se puede relacionarla con la ”co-moving distance” r_0 y redshift z en la forma

$$D_L = a_0 r_0 (1+z). \tag{14}$$

Aquí a_0 corresponde al factor de escala en el tiempo hoy, y se puede utilizar una normalisación con $a_0 = 1$.

Un ”standard candle” es una clase de objetos astronómicos con luminosidad conocida, o de la cual se puede inferir la luminosidad sin conocer la distancia. La medición del flujo del objeto entonces permite determinar la distancia. Esta distancia (por r_0) depende de los parámetros cosmologicos, y permite su determinación.

5) Ejercicio:

Observaciones en el radio nos permiten que comprobemos todas las galaxias, sin tener efectos blindar por el polvo en o entre las galaxias. Suponga que hay un universo euclideano y infinito. Tambien suponemos que la distribuccion de las galaxias sea independiente del espacio y del tiempo, y que la densidad numérica de las galaxias sea n. La luminosidad de cada galaxia sea igual con valor L.

a) Calcule el número de las galaxias en un cascillo esférico delgado con radio r y espesura dr.

Solución:

El volumen de un cascillo esférico delgado es $4\pi r^2 dr$. Dado la densidad numérica n de las galaxias, el número total en el cascillo es $dn(r) = 4\pi r^2 n dr$.

b) Ejercicio: Use la sustitución $L = 4\pi r^2 S$ para obtener el número de las galaxias con un flujo mayor que S. A eso referimos como $dn(> S)$.

Solución:

Con $L = 4\pi r^2 S$, $r = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}$, y $dr = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{4\pi}} S^{-3/2} dS$,

podemos escribir N en la forma

$$dn(S) = 4\pi \frac{L}{4\pi S} n \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{4\pi}} S^{-3/2} dS \right) \tag{15}$$

o

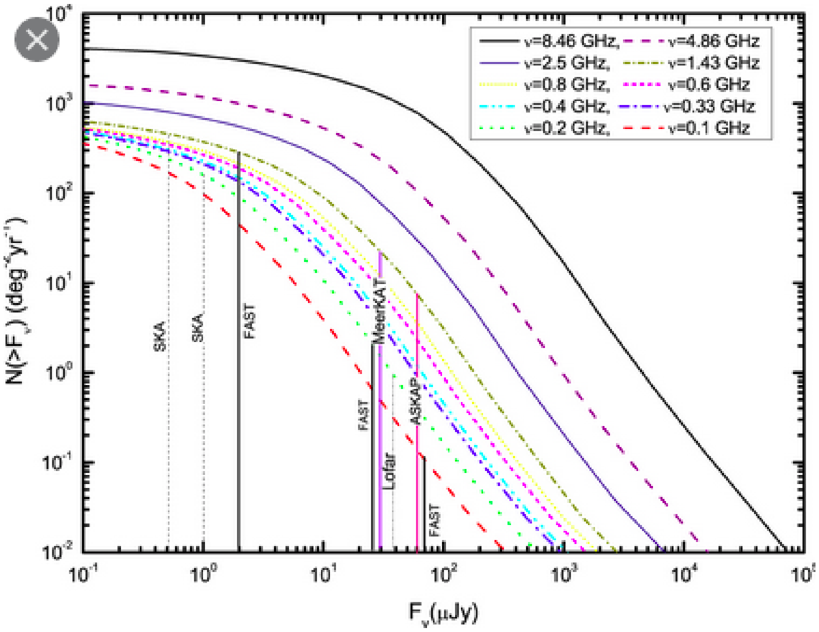
$$dn(S) = -\frac{1}{2}\frac{L^{3/2}}{S^{5/2}} n \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} dS \right). \tag{16}$$

Por integración $\int_S^\infty$ obtenemos:

$$dn(> S) = \frac{1}{3}\frac{L^{3/2}}{S^{3/2}} n \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} dS \right). \tag{17}$$

c) Ejercicio:

Compare su predicción con esta observación:



De al menos dos razones porque su resultado esta diferente.

Solucción:

La predicción es un power-law que corresponde a una linea derecha en un diagrama logaritmico. La observación muestra datos más complejos y se ve una combinación de distintos power-laws, que son diferentes en los limites de flujos pequeños y flujos largos. Eso implica que al menos uno de los supuestos del calculo no era correcto. Unos posibles razones por las diferencias:

- No todas galaxias tienen la misma luminosidad.
- Quizás el universo no tiene geometria euclideana o no esta infinito.
- La densidad de galaxias no necesariamente es homogenea. En el modelo estandar de cosmologia, la densidad esta homogenea en un tiempo fijo, pero en caso de objetos lejanos, veamos el pasado, cuando la densidad era diferente. Eso no esta reflejado en el calculo.
- También es posible que las galaxias y sus luminosidades se han desarrollado en la evolución cosmica.

Eso son unas posibles soluciones. En realidad se puede explicar la forma observada de esta diagrama por el efecto de la expansión.